دکتر جلیل روشندل★

عناصر تئوری بازی ها

مقدمه

طراحان جنگی سناریوهایی را که نمی توان در صحنه واقعی جنگ مورد آزمون عملی قرار داد، در بازیهای جنگی و بدون وارد ساختن کشتار و خسارت می آزمایند. نقش ویژهٔ تئوری بازیهاکشف قوانین حاکم بر بازیهای جنگی و بکارگیری این قوانین در پیش بینی حاصل بازی و از آن طریق پیش بینی نتیجهٔ جنگ است. از آنجا که طرحها و استراتژیهای معتبر می بایستی براساس فرضیات واقع گرایانه اتخاذ گردند، لذا درك و استفاده از تئوری بازیهااهمیت فوق العاده‌ای پیدا کرده است.

مقاله حاضر خلاصه‌ای است از کتاب «عناصر تئوری بازیها» که در سال ۱۹۸۰ توسط Ye. S. Venttsel و تحت عنوان Elements of Game Theory نوشته شده و به وسیلهٔ انتشارات MIR به چاپ رسیده است. به منظور قابل استفاده تر کردن مفهوم نظریه بازیها سعی شده است با تلخیص اصل مطلب و حذف بخشهای صرفاً ریاضی و پیچیدهٔ آن، مقاله‌به صورتی ارائه گردد که ضمن در برداشتن جنبه های نظری، جنبه های کاربردی را نیز در برگیرد. داشتن اطلاعاتی در زمینه ریاضی و تئوری احتمالات برای درك مطلب لازم است و مقاله با هدف ارائه راهبردهای عملی اقتصادی و نظامی نوشته شده است.

★ استادیار دانشکده حقوق و علوم سیاسی دانشگاه تهران

مفاهیم اساسی «تئوری بازیها»

برای فهم و درك اغلب مسائل اجتماعی مجبور به تحلیل شرایطی هستیم که در آن دو یا چند طرف درگیر با اهداف گوناگون وجود دارند که رقیب یکدیگر نامیده می شوند و عمل هر رقیب بستگی به عمل طرف مقابل پیدا می کند. چنین موقعیتهایی را "شرایط مخاصمه" [۱] می‌نامیم. همه موقعیتهایی که در یک وضعیت درگیری نظامی پیش می آیند، نمونه ای از "شرایط مخاصمه" می باشند. هر یک از طرفین رقیب، ارزیابیها و تمهیداتی را به منظور جلوگیری از موفقیت طرف دیگر انجام می دهند.

در انتخاب اسلحه یا شکل استفادهٔ جنگی از آن و در مجموع در عملیات برنامه ریزی شدهٔ نظامی نیز "شرایط مخاصمه" پدیدار می شود. همه تصمیم ها در چنین حالتی مبتنی بر این فرض است که طرف مخالف نیز از مطلوب ترین گزینهٔ خود استفاده خواهد کرد.[۲] نیاز به تحلیل موقعیتهائی از این نوع سبب پیدایش تئوری بازی ها شده است که همراه با روش ریاضی خاص خود شرایط مخاصمه را تبیین می کند. برای درك بهتر شرایط مخاصمه، الگوئی راکه نمایانگر هر یک از موقعیتها باشد، "بازی" [۳] می نامند.

تفاوت یک "بازی" با یک موقعیت درگیری واقعی در این است که بازی براساس قوانین تعریف شده ای انجام می شود درحالی که یک موقعیت درگیری لزوما" شرایط از پیش تعیین شده‌ای ندارد. یک بازی ممکن است شامل دو یا چند طرف درگیر باشد که درحالت اول آن را بازی دو نفره و درحالت دوم آن را بازی چند نفره می نامیم. در عمل بازیهای دو نفره اهمیت بیشتری دارند و ما نیز در این بحث صرفا به تحلیل همین نوع از بازیها اکتفا کرده و در ابتدا به تشریح مفاهیمی اساسی از نظریهٔ بازیها می پردازیم.

طرفین متخاصم راکه دارای علائقی مخالف همدیگر هستند، A و B می نامیم. "قواعد بازی" مجموعه ای از شرایطی است که قواعد متقاعدکننده ای برای هر عمل دربازی‌ارائه‌می‌دهد. ما نتایج بازی را (که لزوما"رویدادهای کمّی نیستند) به صورت کمّی ارزیابی نموده و به آنها عددی را نسبت می دهیم. به طور مثال ، در بازی شطرنج، می توان عدد ۱+ را برای برد، ۱- را برای باخت و صفر را برای تساوی در نظر گرفت.

---

1 - Conflict Situation

۲ - اساسا در تئوری بازی ها فرض بر این است که طرفین درگیری دارای هوش برابر هستند.

3 - Game

یک بازی را وقتی بازی " با مجموع صفر" می نامیم که برد یک بازیگر معادل باخت طرف دیگر باشد، یعنی آنچه که یکی از طرفین به دست می آورد، درست برابر آن چیزی باشد که دیگری از دست داده است و یا به عبارت دیگر مجموع بردها و باخت ها برابر صفر باشد.

در یک بازی " با مجموع صفر" علائق بازیکنان کاملا" برعکس می باشد. ما از این پس تنها بازیهای "با مجموع صفر" را مورد ملاحظه قرار خواهیم داد:

از آنجاکه در یک بازی "با مجموع صفر" بهرهٔ یک بازیگر برابر است با بهرهٔ بازیگر دیگر با علامت مخالف ، واضح است که در تحلیل چنین بازیهایی می توان تنها بهره یا برد یک بازیگر را درنظر گرفت. (بطور مثال بازیگر A) بنابراین همواره بازیگر A را به عنوان برنده و بازیگرB را به‌عنوان‌بازنده‌درنظرمی گیریم. واضح است که این شرط صوری بوده و در آن الزامی به داشتن یک سود حقیقی برای اولین بازیگر (A) وجود ندارد. به آسانی دیده می شود که با عوض شدن علامت بهره، شرایط عکس حاصل می گردد. در تئوری بازیها یک "حرکت"، تا آنجائی که قواعد بازی اجازه می دهند، انتخابی است از یک امکان به امکان دیگر.

حرکتها به دو دسته "شخصی و تصادفی" تقسیم می شوند:

یک "حرکت شخصی"، انتخاب آگاهانه بازیگر در تمامی حرکات ممکن در یک وضعیت فرضی است. بهترین مثال برای یک "حرکت شخصی" ، حرکات بازی شطرنج می‌باشد.

یک حرکت تصادفی "انتخابی است ما بین تعدادی از امکانات که نه به وسیله تصمیم بازیگر بلکه به وسیلهٔ بعضی وسایل تصادفی (پرتاب سکه یا تاس یا...) تحقق می یابد.

برای مثال، انداختن سکه حرکتی است تصادفی ، با دو امکان برابر (شیر یا خط). برای آنکه یک بازی از نظر ریاضی تعریف شده باشد، باید برای هر حرکت تصادفی «توزیع احتمال»[1] براساس قواعد بازی تعیین و نتایج ممکن محاسبه شده باشد.

بازیها صرفا" براساس نوع حرکات (شخصی و تصادفی) تقسیم بندی نمی شوند. بلکه براساس نوع و مقدار اطلاعاتی که در اختیار هر بازیگر (در رابطه با عمل او) قرار می گیرد، نیز می‌توان آنها را دسته بندی کرد. یک بازی با "اطلاع کامل"، بازی‌ای راگویند که در آن هر بازیگر، در هر حرکت از نتایج همهٔ حرکات گذشته، شخصی و تصادفی، آگاه است. نمونه ای از بازی های با "اطلاع کامل" شطرنج و بازی" دوز" است. اغلب بازیهای عملی مهم بازیهای با "اطلاع کامل" نیستند، چراکه نیاز به اطلاعاتی درباره اعمال مخالف، معمولا" عنصر اساسی موقعیتهای

1 - Probability Distribution

مخاصمه محسوب می گردد.

یکی از مهمترین مفاهیم تئوری بازیها مفهوم "استراتژی" است. یک "استراتژی" مجموعه‌ای از قوانینی است که به گونه ای واضح انتخاب هر "حرکت شخصی" بازیگر را باتوجه به موقعیتی که در جریان بازی پیش آمده است، تعیین می کند. مفهوم "استراتژی" به توضیح بیشتری محتاج است که به تفصیل تشریح خواهد شد.

برای آنکه‌استراتژی در یک بازی معنی داشته باشد، آن بازی باید دارای حرکات شخصی باشد، برای بازیهایی که فقط از حرکات تصادفی تشکیل شده‌اند، هیچ استراتژی وجود ندارد.

بازیها را همچنین می توان به دو دسته "متناهی "[1] و "نامتناهی"[2] که بستگی به تعداد استراتژیهای ممکن دارد، تقسیم کرد. یک بازی "متناهی" نامیده می شود، اگر هر بازیگر تنها از تعدادی متناهی استراتژی برخوردار باشد. بازی متناهی‌ای را که در آن بازیگر A دارای m استراتژی و بازیگر B دارای n استراتژی باشد، یک بازی $m \times n$ می نامیم.

در اینجا با بیان یکی از ساده ترین و مشهورترین بازیها، بازی پرتاب سکّه، مفاهیم پیش گفته در تئوری بازیها را به طور دقیق تری مورد بررسی قرار می دهیم .

مثال ۱-۱ :

دو بازیگر A و B بدون نگاه کردن به یکدیگر، هر کدام یک روی سکه ای را به دلخواه روی میزی قرار می دهند. اگر هر دو یک طرف را انتخاب کرده باشند، (هر دو شیر یا هر دو خط) آنگاه بازیگر A هر دو سکه را دریافت می کند (به عنوان برد) در غیر این صورت ، سکه‌ها به بازیگر B می رسد.

حل : این بازی تنها دارای دو حرکت است و هر دو حرکت شخصی هستند. این بازی با اطلاع کامل نیست چراکه در هر لحظه که یکی از بازیکنان حرکت خود را انجام می‌دهد، از قصد حریف، دایر براینکه کدام روی سکه را بازی خواهد کرد، آگاه نمی باشد.

دو استراتژی برای بازیگر A وجود دارد: A_1 آنکه شیر را بازی کند وA_2 آوردن خط . به همین ترتیب برای بازیگر B دو استراتژی B_1 و B_2 را داریم. بنابراین این یک بازی ۲×۲ است . اگر برد را (برای A) با عدد ۱+ نشان دهیم ، ماتریس بازی به صورت زیر خواهد بود:

---

1 - Finite

2 - Infinite

B / A	B_1(شیر)	B_2(خط)
A_1(شیر)	۱	۱-
A_2(خط)	۱-	۱

(این ماتریس ، نشان دهندهٔ برد A است)

در ابتدا فرض می کنیم که بازی فقط یک‌بارانجام‌می‌شود. در این صورت بدیهی است که صحبت از یک استراتژی هوشمندانه تر بی‌معنی خواهد بود، چراکه هر بازیگر به گونه‌ای برابر یکی از دو امکان خود را بازی خواهد کرد. اما اگر بازی به دفعات تکرار شود، در آن صورت شرایط چیز دیگری است.

حال فرض کنید که بازیگر A استراتژی خاصی نظیر (A_1) را انتخاب کرده باشد. در این صورت از اولین حرکات A ، حریف (B) استراتژی را حدس زده و پاسخی مناسب، به طوری که برد A را به حداقل مقدار ممکن برساند، پیش خواهد گرفت. در این مورد مثلاً به طور متوالی "خط" را انتخاب می کند.

بدیهی است که بازی با تنها یکی از استراتژیها، برای A مفید نبوده و به منظور اجتناب از باخت باید گاهی شیر و گاهی خط را بازی کند. این نیز قابل توجه است که اگر ما به طور متناوب شیر یا خط بازی کنیم، (یک‌بارشیروباردیگرخط) حریف ممکن است آنرا حدس زده و استراتژی ما را به ضرر خودمان به کار گیرد. (با در نظر گرفتن استراتژی معکوس).

روشن است که یک روش قابل اعتماد برای آنکه تضمین کننده پنهان ماندن استراتژی ما از حریف باشد، ترتیب دادن انتخاب هایمان به گونه ای است که حتی خودمان از آن خبر نداشته باشیم. این می تواند مثلاً با بالا انداختن سکه و دیدن نتیجه بعد از فرود، حاصل شود.

بنابراین مابه یکی از مفاهیم اساسی تئوری بازیها بنام "استراتژی مختلط[1]" نزدیک شده‌ایم، و این یعنی آنکه "استراتژیهای خالص" A_1 و A_2 به طور تصادفی و با فراوانی مشخص انتخاب شوند.

در این مثال ، به دلیل ملاحظات مربوط به تقارن، استراتژیهای A_1 و A_2 می بایستی با فراوانی یکسان برگزیده شوند. در بازیهای پیچیده تر ممکن است تصمیم گیریها مشکل تر باشند.

مثال۲ :

دو بازیگر A و B هر کدام به تناوب و مستقل از یکدیگر، یکی از سه عدد ۱ ، ۲ یا ۳ را

---

1 - Mixed Strategy

یادداشت می کنند. اگر مجموع اعدادی که آنها یاد داشت می کنند، زوج باشد، آنگاه B به اندازهٔ آن مجموع به A پول پرداخت می نماید (به دلار) و اگر فرد باشد، آنگاه برعکس بازیگر A همان مبلغ را به B می پردازد.

حل : بازی شامل دو حرکت می باشد و هر دو حرکت شخصی هستند. بازیگر A در این بازی سه استراتژی دارد، یاد داشت کردن عدد ۱ (A_1)، یادداشت عدد ۲ (A_2) و یاد داشت عدد ۳ (A_3). حریف، یعنی بازیگر B نیز دارای همین سه استراتژی است. بنابراین این یک بازی ۳×۳ است. ماتریس این بازی به قرار ذیل است:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

(ماتریس بالا برحسب برد [بهره] A نوشته شده است.)

همانند مثال قبل، روشن است که بازیگر B می تواند به هر استراتژی A به گونه ای که به ضرر وی (A) تمام شود، پاسخ دهد. اگر A استراتژی A_1 را انتخاب کند، B آن را با استراتژی B_2 پاسخ خواهد داد، در صورت انتخاب A_2 بازیگر A با پاسخ B_3 مواجه می شود و استراتژی A_3 جواب خود را با استراتژی B_2 دریافت می دارد. بنابراین انتخاب یک استراتژی ثابت موجب ضرر و زیان ما خواهد شد.

مثال ۳:

سه نوع موشک A_1 و A_2 و A_3 را در اختیار داریم و دشمن دارای سه نوع جنگنده B_1 و B_2 و B_3 است. هدف ما سرنگون ساختن یک جنگنده و هدف دشمن اجتناب از آن می باشد. با به کاربردن موشک A_1 احتمال سرنگونی جنگنده های B_1 و B_2 و B_3 به ترتیب ۰/۹، ۰/۴ و ۰/۲ است. با A_2 این احتمالات به ترتیب ۰/۳ و ۰/۶ و ۰/۸ و وقتی A_3 را به کار ببریم، احتمالات ۰/۵ و ۰/۷ و ۰/۲ خواهند بود.

این یک بازی ۳×۳ است با دو حرکت "شخصی" و یک حرکت "تصادفی". حرکت شخصی ما عبارت از انتخاب یکی از سه نوع موشک و حرکت شخصی دشمن انتخاب یک جنگنده برای دور نگاه داشتن از صحنه است. حرکت تصادفی ، گزینش موشک می باشد. این

حرکت ممکن است با مورد اصابت قرار گرفتن یک جنگنده به اتمام برسد و یا ممکن است جنگنده مورد اصابت قرار نگیرد و حرکت ادامه یابد. بُرد ما در صورتی که جنگنده هدف قرار گیرد، برابر با یک و در غیر این صورت صفر است.
استراتژیهای ما عبارتند از سه انتخاب برای موشکها، و استراتژی دشمن انتخاب سه جنگنده است. ماتریس بازی در ذیل داده شده است:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0.9	0.4	0.2
A_2	0.3	0.6	0.8
A_3	0.5	0.7	0.2

هدف تئوری بازی ها

هدف تئوری بازی ها محاسبه مطلوب‌ترین رفتار بازیگر در شرایط مخاصمه می‌باشد، یعنی محاسبه "استراتژی بهینه" [1] برای هر بازیگر. در تئوری بازیها، استراتژی بهینه برای یک بازیگر، آن است که وقتی به دفعات تکرار شود، بیشترین بهره متوسط را برای او به ارمغان آورد. در انتخاب این استراتژی همواره فرض براین است که حریف لااقل به اندازه خود ما درگزینش معقول مهارت دارد و اینکه هیچ چیز نمی تواند از رسیدن ما به مقصود جلوگیری نماید.
تئوری بازیها، مانند هر مدل ریاضی که برای پدیده ای پیچیده عرضه می گردد، دارای محدودیتهای خاص خود است. در اینجا با ارائه یک اصل بسیار مهم، سعی می کنیم برخی از این شرایط را آشکار سازیم.

پایداری و ناپایداری در استراتژی کم بیشینه

اصل مینی ماکس [2] (کم بیشینه) یاماکسی مین [3] (بیش‌کمینه) همان طورکه ازمفهوم لغوی

1 - Optimal strategy

2 - Minimax

3 - Maximin

واژه ها بر می آید، درحالتی کمترین احتمال و در حالتی دیگر بیشترین آن را مطرح می کند. باید توجه داشت در بعضی از بازیها استراتژیهای کم بیشینه "پایدار" و در بعضی دیگر" ناپایدار" هستند و اصولا پایداری و ناپایداری از ویژگیهای این استراتژی است که در مثال بعدی روشن تر می شود.

"حد پائین و حد بالای یک بازی"

"اصل کم بیشینه[1] یا «اصل مینی ماکس»

یک بازی m×n با ماتریس ذیل را در نظر بگیرید:

B / A	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

(شکل ۱-۲)

استراتژیهای خودمان (A) را با زیر نویس i و استراتژیهای حریف (B) را با j نامگذاری کرده ایم. در ذیل ، استراتژی بهینهٔ خودمان را محاسبه می کنیم.

هرکدام از استراتژیهایمان را به ترتیب با شروع از A_1 تحلیل می کنیم.بااستراتژی A_i ما با پاسخ حریف توسط استراتژی B_j روبه رو هستیم که در آن حالت بهره ما a_{ij}کمترین مقدار خود است. این مقدار بهره ، یعنی کوچکترین عدد a_{ij} در ردیف i را محاسبه می کنیم و آنرا به a_i نشان می دهیم:

$$a_i = \min_j a_{ij} \quad (۲-۱)$$

1- Minimax Principle

نشانهٔ $\min\limits_{j}$ (می نیمم روی j) نشان دهندهٔ کمترین مقدار پارامتر داده شده برای همه j های ممکن است.

اعداد a_i راکنار ماتریس بازی در یک ستون اضافی قرار می دهیم. با انتخاب استراتژی Ai ما می توانیم - با توجه به اقدام منطقی حریف - روی بردی نابیشتر (کمتر یا مساوی) از a_i حساب کنیم. طبیعی است که برای انجام یک عمل محتاطانه، با در نظر گرفتن واکنش حریف (با اجتناب از ریسک کردن) ما باید روی استراتژی ای (A_i) تصمیم بگیریم که عدد a_i آن بیشینه (ماکزیمم) باشد. ما این مقدار ماکزیمم را a می نامیم:

$$a = \max_i a_i$$

و یا با توجه به (۱-۲)

$$a = \max_i \min_j a_{ij}$$

مقدار a "حد پائین" بازی یا به عبارت دیگر "بهره بیش کمینه" یا به طور ساده‌تر "بیش کمینه" (ماکسی مین) نامیده می شود. عدد a روی بعضی ردیفهای ماتریس بازی قرار می گیرد [۱]، استراتژی نظیر این ردیف را استراتژی "بیش کمینه" می نامیم.

روشن است ، که اگر ما استراتژی "بیش کمینه" (ماکسی مین) را در پیش گیریم، آنگاه علی‌رغم هر رفتار بازیگر B، می توانیم مطمئن باشیم که بهرهٔ ما کمتر از مقدار a نخواهد بود. و در واقع به همین دلیل است که آن را "حدپائین" بازی می خوانیم . این کمترین مقدار تضمین شده‌ای است‌که‌می‌توان درمحتاطانه‌ترین حالت ممکن به دست‌آورد.البته درچنین‌شرایطی‌برداحتمالی‌ما هم به کمترین مقدار خواهد رسید که باتوجه به ریسک کمتر نتیجهٔ مطلوبی خواهد بود. به تعبیردیگر برای اینکه از باخت بیشتر اجتناب شود، باید از برد بیشتر هم چشم پوشی شود. واضح است همین تصمیم گیری برای حریف B هم امکان پذیر است.

چون علاقهٔ رقیب متوجه کم کردن بهرهٔ ما است، او باید آن سری از استراتژیهای خود را مورد بررسی قرار دهد که دارای بیشترین بهره می باشند. بنابراین ما بیشترین مقادیر a_{ij} را برای هر ستون یادداشت کرده، آنها را در یک ردیف اضافی زیر ماتریس اصلی قرار می دهیم. (مانند شکل صفحه بعد)

---

۱ - ممکن است تنها یک ردیف شامل آن باشد.

$A \backslash B$	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
β_j	β_1	β_2	...	β_m	

$$\beta_j = \max_j a_{ij}$$

و برای کمترین مقدار β_j داریم:

$$\beta = \min_j \beta_j$$

یا

$$\beta = \min_j \max_j a_{ij}$$

عدد β "حد بالای" بازی نامیده می شود که آن را "کم بیشینه" (مینی ماکس) نیز گویند. استراتژی حریف با توجه به بهرهٔ "کم بیشینه"، استراتژی "کم بیشینه" او نامیده می شود. با در پیش گرفتن استراتژی محتاطانهٔ "کم بیشینه"، حریف می تواند مطمئن باشد درصورت هر اقدامی از طرف ما برعلیه او زیانی که متحمل خواهد شد، از β بزرگتر نخواهد بود.

استراتژیهای بسیار احتیاط آمیز "بیش کمینه" و "کم بیشینه" را تحت عنوان کلی استراتژیهای "کم بیشینه" نامگذاری می کنند. و توصیه به بازیگران، مبنی بر انتخاب استراتژیهای "کم بیشینه" را "اصل مینی ماکس" گویند.

مثال ۱ :

در مثال ۱ بخش ۱ یک بازی با ماتریس ذیل مورد بررسی قرار گرفت:

A \ B	B_1	B_2	a_i
A_1	1	-1	-1
A_2	-1	1	-1
β_j	1	1	

چون مقادیر a_i و β_j ثابت و به ترتیب برابر ۱- و ۱+ هستند، حدود پائین و بالای بازی ۱- و ۱+ می باشند:

$$a = -1 \quad \text{و} \quad \beta = +1$$

هر دو استراتژی بازیگر A یک استراتژی "بیش کمینه" و همینطور دو استراتژی بازیگر B یک استراتژی "کم بیشینه" است. بنابراین بدیهی است که بازیگر A هر کدام از استراتژیهای خود راکه انتخاب کند، می تواند مطمئن باشد که زیان او از ۱ بزرگتر نیست.

مثال ۲ :

مثال ۲ از بخش ۱ بازی با ماتریس ذیل را ارائه می دهد:

A \ B	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	–3	4	–3
A_2	–3	4	–5	–5
A_3	4	–5	6	–5
β_j	4	4	6	

"حد پائین" بازی $a=-3$ و "حد بالای " آن $\beta=4$است. استراتژی بیش کمینهٔ A، A_1 است. استراتژی "کم بیشینه" حریف می تواند هرکدام از دو استراتژی B_1 یا B_2 باشد. با انتخاب هر کدام B می تواند زیان نا بیشتر (کمتر یا مساوی) از ۴ را تضمین نماید. اگر A از استراتژی بیش کمینهٔ خود تخطی نماید (مثلاً با انتخاب A_2)، حریف با بازی کردن استراتژی B_2 او را تنبیه می نماید. در چنین حالتی بهره او به ۵-کاهش خواهد یافت.

مثال ۳:

مثال ۳ از بخش ۱ بازی را با ماتریس ذیل ارائه می دهد:

A \ B	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	0.9	0.4	0.2	0.2
A_2	0.3	0.6	0.8	0.3
A_3	0.5	0.7	0.2	0.2
β_j	0.9	0.7	0.8	

حد پائین بازی ۰/۳ = a و حد بالای بازی ۰/۷ = β می باشد. استراتژی محتاطانهٔ A (بیش کمینهٔ)، A_2 است. بنابراین با انتخاب موشک A_2، ما می توانیم با متوسط احتمال لااقل ۰/۳ به مورد اصابت قرار دادن جنگدهٔ دشمن اطمینان داشته باشیم. یعنی [با انتخاب این استراتژی می توان به تقریب اطمینان داشت که از هر ۱۰ جنگندهٔ دشمن ۳ فروند آنها را سرنگون سازیم]

استراتژی کم بیشنیه دشمن، B_2 است. با در پیش گرفتن این استراتژی، دشمن با احتمال متوسط ۰/۷ انتظار سرنگون شدن دارد.

[یعنی از هر ۱۰ جنگنده‌اوبه‌طور متوسط ۷ فروند سرنگون می شوند، یا به عبارت دیگر از هر ۱۰ موشکی که به طرف جنگنده ها پرتاب شوند، ۷ فروند آنها به هدف اصابت می نمایند]

این مثال یکی از مهمترین خواص استراتژیهای کم بیشینه ، یعنی "ناپایداری" را به خوبی نشان می دهد. تصور کنید که A با استراتژی بیش کمینهٔ خود یعنی A_2 بازی می کند و حریف نیز با استراتژی کم بیشینه. تا زمانی که طرفین در گیر، با این استراتژیهابازی می کنند، بهرهٔ متوسط ۰/۶ می باشد. (به ماتریس بازی نگاه کنید) این مقدار، بزرگتر از حد پائین و کوچکتر از حد بالای بازی است.

حال تصور کنید که دشمن از اینکه ما از موشک A_2 (استراتژی A_2) استفاده می کنیم، به نحوی آگاه شود او فوراً آن را توسط استراتژی B_1 که بهره را به مقدار ۰/۳ کاهش می‌دهد، پاسخ خواهد داد. ما نیز جواب دندان شکنی برای B_1 داریم، از طریق A_1 به بهرهٔ ۰/۹ دست می‌یابیم و به همین طریق الی آخر.

بنابراین وضعیتی که در آن هر دو بازیگر، استراتژیهای کم بیشینهٔ خود را به کار می‌گیرند، ناپایدار است و ممکن است توسط اطلاعات دریافتی حریف از هم بپاشد. اما بازیهائی نیز وجود

دارند که در آنها استراتژیهای کم بیشینهٔ "پایدار" می باشند. اینها بازیهائی هستند که در آن ها حد پائین با حد بالا برابر است، یعنی :

$$a = \beta$$

در این صورت ، این مقدار مشترك را "مقدار خالص بازی" یا به طور ساده تر "مقدار بازی" می نامیم و آنرا با حرف v نشان می دهیم.

ذیلاً ماتریس یک بازی ۴×۴ را ملاحظه می کنید:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0.4	0.5	0.9	0.3	0.3
A_2	0.8	0.4	0.3	0.7	0.3
A_3	0.7	0.6	0.8	0.9	0.6
A_4	0.7	0.2	0.4	0.6	0.2
β_j	0.8	0.6	0.8	0.9	

حد پائین بازی ۰/۶ =a و حد بالای آن ۰/۶ = β می باشد. بنابراین داریم: $a = \beta = v = 0/6$ در ردیف A_3 عدد ۰/۶ که همان "مقدار بازی" است، همزمان کوچکترین عدد ردیف خود و بزرگترین آن در ستون B_2 می باشد.

در هر منحنی نقطه ای وجود دارد که از یک رویه منحنی پائین ترین نقطه است، درحالی که از روی دیگر آن بالاترین نقطه می باشد. این نقطهٔ را "نقطه زینی" یا **Saddle Point** می نامند. در تئوری بازیها نقطه زینی نشانگر منافع یا بهرهٔ بازیگران در یک بازی دو نفره است. استراتژی با کم بیشینه پایدار را می توان به جای منحنی با خط مستقیم نشان داد.

در مثال ما نقطه زینی در محل برخورد استراتژیهای "کم بیشنیه" A_3 و B_2 قرار دارد. این استراتژیها را استراتژیهای "بهینه" نیز می نامند و ترکیب آنها را حل بازی گویند. حل بازی دارای خاصیتهای قابل توجه ذیل می باشد:

اگر یکی از بازیگران (مثلاً A) استراتژی بهینه را اتخاذ نماید و بازیگر دیگر (B) به دلیلی از استراتژی بهینهٔ خود منصرف گردد، آنگاه هیچ سودی برای B وجود نخواهد داشت. در این صورت، آنچه B بدست می آورد، یا ثابت خواهد بود و یا به شدت کاهش می یابد.

بنابراین می بینیم که در یک بازی با نقطهٔ زینی، استراتژیهای کم بیشینه دارای خاصیت

"پایداری" هستند. یک جفت از استراتژیهای‌های بهینه در یک بازی با نقطه زینی همانند دو کفهٔ یک ترازو و درحالت تعادل می باشند. هر گونه انحراف از یک استراتژی "بهینه" موجب زیان بازیگر منحرف شده و او را برای بازگشتن به حالت اولیه تحت فشار قرار می دهد.

ویژگیهای استراتژی بهینه

هر بازی با نقطه زینی که یک راه حل از بازی را توسط استراتژیهای بهینه ارائه می‌دهد، دارای خواص ذیل است:

(۱) اگر طرفین درگیر، استراتژیهای بهینه خود را به کار گیرند، آنگاه بهره متوسط برابر با مقدارخالص بازی v؛ - که درعین حال حد پائین و حد بالای بازی است، خواهد بود.

(۲) اگر یکی از طرفین درگیر براساس استراتژی بهینه عمل کرده، اما طرف دیگر از آن منصرف گردد، آنگاه این انحراف به زیان او تمام شده و هیچ حالت دیگری نمی تواند بهرهٔ او را افزایش دهد.

بازیهائی که دارای نقطهٔ زینی هستند، هم از حیث تئوری و هم از جهت عملی، بسیار جالب توجه می باشند.

تئوری بازیها ثابت می کند که هر بازی با "اطلاع کامل" یک نقطهٔ زینی دارد و به طریق مشابه ، هر بازی با نقطه زینی دارای یک راه حل بوده که این به معنی وجود استراتژیهای بهینه‌ای است که برای هر بازیگر بهره متوسطی برابر با مقدار بازی ارائه می دهد.

اگر یک بازی با اطلاع کامل تنها شامل حرکات شخصی بوده و هر بازیگر نیز با استراتژی بهینهٔ خود بازی کند. آنگاه بازی همواره با یک رویداد مشخص و یا بهره ای کاملاً" برابر با مقدار بازی به پایان خواهد رسید. البته ما در بازیهای مهم و عملی به ندرت با بازیهای با نقطه زینی روبه رو می‌شویم، اغلب بازیها دارای حد پائین و بالای نا برابر و مختلف می باشند. امّا همان طور که گفتیم با به کار بردن استراتژی ماکسی مین ، می توان به وضوح بهره ای برابر حد پائین بازی (a) را تضمین کرد.

استراتژی مختلط

در اینجا یک سئوال طبیعی پیش می آید، آیا ممکن است ما بهرهٔ متوسطی بیش از a رابه وسیله انتخاب تصادفی چندین استراتژی - به‌جای‌بازی کردن با تنها یک استراتژی (استراتژی خالص) - به دست آوریم؟

در نظریه بازیها چنین استراتژیهای ترکیبی راکه شامل چندین استراتژی خالص بوده و به طور تصادفی با نسبت تکرار معین انتخاب می شوند، استراتژیهای "مختلط" می نامند. هر استراتژی خالص، حالت خاصی از استراتژی مختلط است که در آن کلیه استراتژیهای خالص فقط یک بار بازی می شوند ولی فقط یک استراتژی معین یک بار تکرار می شود.

در اینجا یک قضیه اساسی نظریهٔ بازیها که اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط یوهان فون- نویمان [1] به اثبات رسید، بیان می شود؛ از نظر ریاضی دانان اثبات این قضیه اغلب بسیار پیچیده است و بنابراین ما تنها به ذکر صورت اکتفا می کنیم:

" هر بازی محدود لااقل دارای یک راه حل می باشد. امّا این راه حل ممکن است در حوزه عمل استراتژیهای مختلط قرار گیرد. بهره به‌دست آمده از یک راه حل "مقدار بازی" نامیده می‌شود. بنابراین قضیه فون نویمان بیانگر این نکته است که هر بازی محدود لااقل دارای یک "مقدار" می‌باشد.

واضح است که مقدار بازی ν، همیشه بین حد پائین a وحد بالای β قرار دارد: $a \leq \nu \leq \beta$ در ذیل شکل خاصی را برای بیان استراتژیهای مختلط معرفی می کنیم.

اگر برای مثال، استراتژی مختلط ما شامل استراتژیهای خالص A_1 و A_2 و A_3 با تکرارهایی‌به‌ترتیب P_1، P_2 و P_3 $(P_1 + P_2 + P_3 = 1)$ باشد، آن رابه شکل ذیل نشان می دهیم:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$$

و به طور مشابه، استراتژی مختلط حریف به صورت ذیل خواهد بود:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

q_1، q_2 و q_3 تکرارهای استراتژیها B_1، B_2 و B_3 می باشند.

۱ - یوهان فون نویمان ریاضی دان آمریکائی (۱۹۰۳ بودایست - ۱۹۷۵ واشنگتن) صاحب تئوری بازیهای است. او مشخصات یک ماشین احتمالی را ارائه داده است که در واقع می توانست به تحلیل اطلاعات بپردازد و از این نظر پدرکامپیوتر نیز تلقی می شود.

فرض کنید که ما راه حلی برای یک بازی شامل دو استراتژی مختلط بهینهٔ $S_A^\star$ و $S_B^\star$ پیدا کرده‌ایم. در حالت کلی، همه استراتژیهای خالص یک بازیگر ممکن است در استراتژی مختلط او به کار برده نشوند. استراتژیهایی راکه در محدوده استراتژی مختلط و بهینه هر بازیگر وجود دارند، استراتژیهای "کمکی" می نامند.

حل یک بازی ، خاصیت قابل توجه دیگری را نیز بیان می کند. اگر یکی از بازیگران، استراتژی مختلط بهینهٔ خود را برابر با $S_A^\star$ ($S_B^\star$) انتخاب کند، آنگاه بهره بدون تغییر باقی می ماند و مقدار آن صرف نظر از هر واکنش حریف، برابر با مقدار بازی v خواهد بود. در اینجا سعی می کنیم عبارت بالا را ثابت نمائیم:

فرض کنیم که ($S_B^\star$)$S_A^\star$ یک راه حل برای یک بازی mxn باشد. برای ملموس بودن بیشتر، فرض می کنیم که استراتژی مختلط بهینه $S^\star_B$ شامل سه استراتژی کمکی A_1،A_2،A_3 می‌باشد. به همین طریق $S_B^\star$ از سه استراتژی کمکی B_1، B_2 ، B_3 تشکیل شده است.

$$S^\star_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad S_B^\star = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1 \qquad \text{و} \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

می خواهیم ثابت کنیم که اگر ما $S^\star_A$ را انتخاب کنیم، صرف نظراز پاسخ حریف، بهره بدون تغییر باقی خواهد ماند که مقدار آن برابر با مقدار بازی v می باشد.

فرض کنید v_1 ، v_2 و v_3 بهره هائی باشند که وقتی ما استراتژی $S^\star_A$ و حریف هر کدام از استراتژیهای B_1 ، B_2 و B_3 را بازی می کند، به دست آیند. از تعریف استراتژی بهینه مشخص است که انحراف از استراتژی $S^\star_B$ نمی تواند برای حریف سودی در برداشته باشد، بنابراین:

$$v_1 \geq v \quad \text{و} \quad v_2 \geq v \quad \text{و} \quad v_3 \geq v$$

ما قصد داریم ببینیم آیا مقدار v_1، v_2 یا v_3، لااقل در یکی از سه حالت ، می تواند بزرگتر از v باشد یا نه ؟ خواهیم دید که این عملی نیست.

بهرهٔ v را برای استراتژیهای بهینه $S^\star_A$ ، $S^\star_B$ برحسب بهره های v_1 ، v_2 و v_3 به دست می‌آوریم. چون در $S^\star_B$ ، استراتژیهای B_1 ، B_2 و B_3 با تکرارهای q_1 ، q_2 و q_3 بازی می شوند،

داریم :

$$v = v_1q_1 + v_2q_2 + v_3q_3 \qquad (۱)$$

$$(q_1 + q_2 + q_3 = 1)$$

واضح است که اگرحد اقل یکی از مقادیر v_1 ، v_2 و v_3 بزرگتر از v باشد، آنگاه بنابرتساوی (۱) مقدار متوسط آنها یعنی ($v_1q_1 + v_2q_2 + v_3q_3$) بزرگتر از v خواهد شد و چون این خود خلاف فرضی است که در تساوی ۱ داریم و در صورت بزرگتر بودن دیگر نمی‌تواند مساوی باشد، بنابراین به استناد برهان خلف اثبات کامل است.